(3) プログラムで使用する式

・　概略

(ｱ)　地球儀とコンピュータの対応

地軸の傾きと昼夜の長さの関係を理解する時、昼夜の長さは地球儀に紐を当てて測定するが、難しくもあり正確な値が出せず、理解しにくい面もあった。そこで、地球儀で理解する時の補助となるように、その紐と同じ長さを計算で求める。この場合、地球の公転は円軌道として簡単な場合を扱い、次のような手順で計算を行なう。

地球が太陽の周りを公転する。（円軌道）
　↓相対的に見る。
太陽が地球の周りを公転する（円軌道）と考える。

冬至の位置を回転角θの原点ととる。

↓

地球儀で太陽光が当たっている部分を昼の長さとし影の部分を夜の長さとする。その時、昼夜の長さを地球儀に紐を当てて測定するが、その紐の長さを計算で出す。

↓

$$\text{昼の時間} = \frac{\text{昼の長さ}}{\text{昼の長さ＋夜の長さ}} \times \text{自転周期}$$

$$\text{夜の時間} = \text{自転周期} - \text{昼の長さ}$$

注意

1）　1日（平均太陽日）は24時間、1年（太陽年）は365.24日とする。

2）　地軸が傾いているので球面三角形の公式を使用する。

(ｲ)　観測記録とコンピュータの対応

中学校の教育目標では(ｱ)だけでも良いのであるが、実際の観測記録の結果と合わせるためには不十分である。そこで、楕円軌道の効果やその他の補正項を入れて計算を行なわなければならない。以下、その計算手順について述べる。

地球が太陽の周りを公転する。（楕円軌道）
　↓相対的に見る
太陽が地球の周りを公転する（楕円軌道）と考える。

冬至の位置を回転角θの原点ととる。

円軌道と違うのはθが一定角速度で回るのではなく面積速度が一定になる様に回る。θだけに楕円軌道の効果が出てくる。

・→　↓

時刻 t と回転角θとの対応を計算する。

↓

地球儀で太陽光が当たっている部分を昼の長さとし影の部分を夜の長さとする。その時、昼夜の長さを地球儀に紐を当てて測定するが、その紐の長さを計算で出す。

↓

$$\text{昼の時間} = \frac{\text{昼の長さ}}{\text{昼の長さ＋夜の長さ}} \times \text{自転周期} + 2H_1 + 2H_2$$

$$\text{夜の時間} = \text{自転周期} - \text{昼の長さ}$$

H_1；日の出日の入りの時の視半径による補正項
H_2；大気の屈折による補正項

↓

南中時刻＝１２＋（１３５－経度）／１５＋D_1＋D_2

日の出の時間　＝南中時刻－昼の時間／２
日の入りの時間＝南中時刻＋昼の時間／２

D_1；地軸が傾いている為に南中時刻がずれる効果
D_2；楕円軌道をとっている為に南中時刻がずれる効果

↓

南中時刻が収束したら計算をやめる。収束しなければ・に戻る

注意

１）　１日（平均太陽日）は24時間、１年（太陽年）は365.24日とする。

２）　離心率 ε=0.01672とする。

３）　地軸が傾いているので球面三角形の公式を使用する。

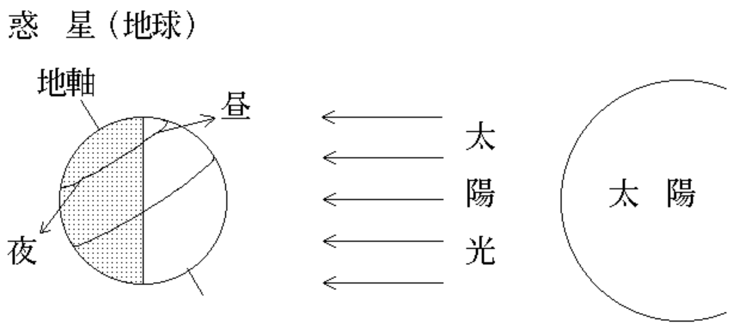
４）　時刻ｔと回転角 θ との関係を計算する為に積分やニュートン・ラプソン法を用いる。

・　理論式の説明

使用する式について説明する。この導出の仕方はオリジナルなので詳しく書く。

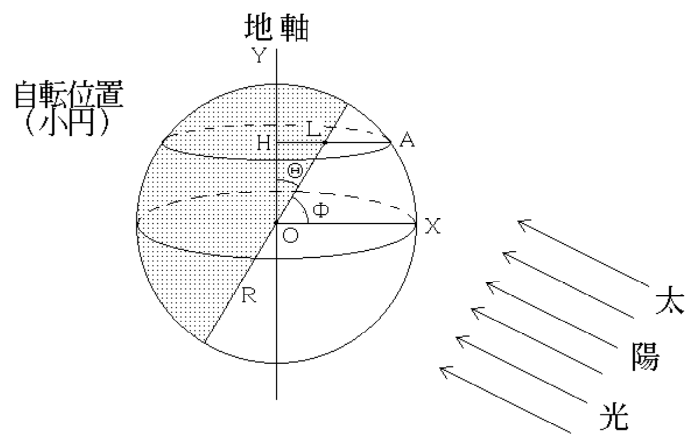
地球が太陽の周りを回っている描像で描いたのが図４である。

図４



この描像では公転の中心は太陽なので原点も太陽にとってあり、また、地軸も傾いているにので昼夜の長さが計算しにくい。そこで、計算しやすいように、原点を地球の中心にとり、地軸がまっすぐ上を向いたような描像にする。ここで、地軸の北半球の方に伸びている方向をＹ軸にとり、また、中心を通りＹ軸に垂直な面内にＸ軸をとる。このＸ軸の取り方であるが、太陽が冬至の日に南中する方向にとる。また、公転の回転角もこのＸ軸を始点とし左まわりを正方向に取る。

図５



ここで、

Θ：地軸の傾き（公転面に垂直に立てた線に対しての地軸の傾き）

Φ：Ａ地点での緯度

Ｒ：惑星の半径

である。

地球の中心ＯからＬ点を結ぶ直線の方程式は

$$Y = \tan(\pi/2 - \Theta)\cdot X \qquad \cdots\cdots \quad (1)$$

Ａ地点を通る小円の中心ＨとＡ点を結ぶ直線の方程式は

$$Y = R\cdot\sin\Phi \qquad \cdots\cdots \quad (2)$$

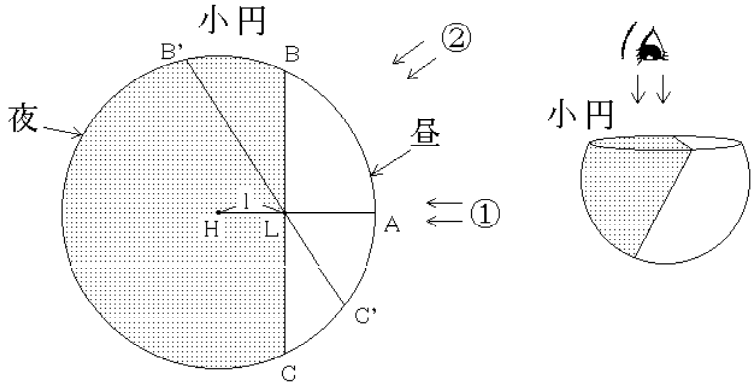
(1)と(2)の交点のＸ座標がＬ点でありその長さが１である。

(1)と(2)より

$$l = R\cdot\sin\Phi/\tan(\pi/2 - \Theta) = R\cdot\tan\Theta\cdot\sin\Phi \qquad \cdots\cdots \quad (3)$$

ここで、自転する位置が描く小円を地軸のＮ極の方から見た図を描く。

図６



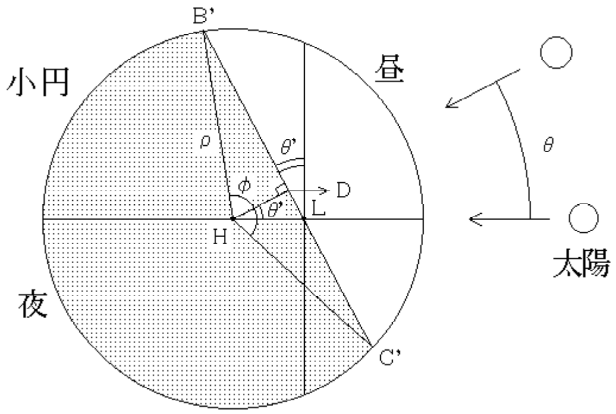
・の方向から太陽光が当たるとすれば、昼の長さは、BとAとCを結ぶ弧の部分である。また、地球が公転をし、・の方向から太陽光が当たるとするとB'AC'が昼の長さになる。この昼の長さは、円と直線の方程式を解いても得られるが、∠B'HC'を幾何学的に求めその角度の比からも得ることができる。ここでは、後者の方法を取ることにする。

また、太陽の黄道面での回転角を θ とし、赤道面で見た時の回転角を θ' として議論を続けていく。

(ｱ)　昼夜の長さと θ' の関係

(a)　$0 \leqq \theta' < \pi/2$ の場合

図7



小円の半径を ρ とし、HからB'C'に垂直な線とB'C'が交わった点をDとおく。

△HB'C'は二等辺三角形であるので、

$\angle DHB' = \phi/2$

で与えられる。

また、

△HDLより、

$HD = l \cdot \cos\theta'$

△HB'Dより、

$HD = \rho \cdot \cos(\phi/2)$

よって、

$l \cdot \cos\theta' = \rho \cdot \cos(\phi/2)$ となり、

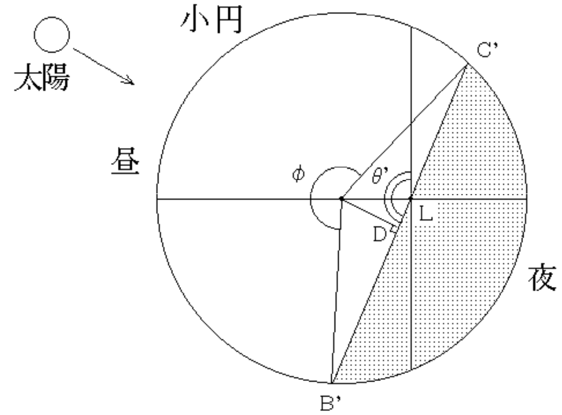
$\phi = 2\cos^{-1}(l/\rho \cdot \cos\theta') = 2\cos^{-1}(\tan\Theta \cdot \tan\Phi \cdot \tan\theta')$

となる。

(b)　$\pi/2 \leqq \theta' < \pi$ の時

(a)の時と同じ様なやり方で解くと

図８



△HDLより、$HD = l \cdot \sin(\theta' - \pi/2)$

△HB'Dより、$HD = \rho \cdot \cos((2\pi - \phi)/2)$

よって

$l \cdot \sin(\theta' - \pi/2) = \rho \cdot \cos((2\pi - \phi)/2)$

となり、

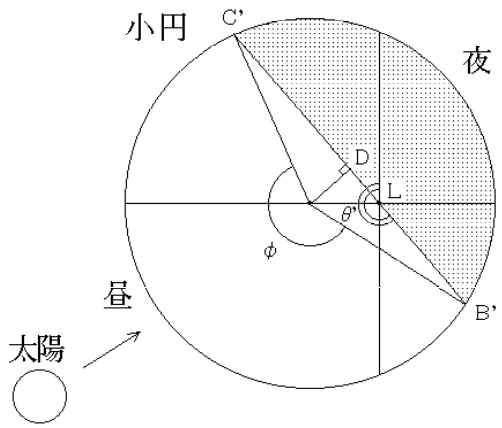
$\phi = 2\pi - 2\cos^{-1}(-\tan\Theta \cdot \tan\Phi \cdot \cos\theta')$

となる。

(c)　$\pi \leqq \theta' < 3\pi/2$ の時

(a)の時と同様に

図９



△HDLより、$HD = 1 \cdot \cos(\theta' - \pi)$

△HB'Dより、$HD = \rho \cdot COS((2\pi - \phi)/2)$

よって

$1 \cdot \cos(\theta' - \pi) = \rho \cdot \cos((2\pi - \phi)/2)$ となり、

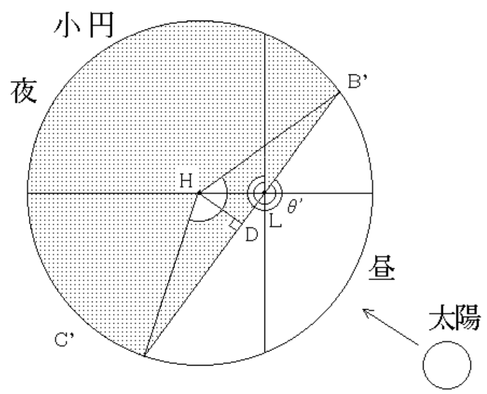
$\phi = 2\pi - 2\cos^{-1}(-\tan\Theta \cdot \tan\Phi \cdot \cos\theta')$ となる。

(d)　$3\pi/2 \leqq \theta < 2\pi$ の時

(a)の時と同様に

図１

0



△HDLより、$HD = 1 \cdot \sin(\theta' - 3\pi/2)$

△HB'Dより、$HD = \rho \cdot \cos(\phi/2)$

よって

$1 \cdot \sin(\theta' - 3\pi/2) = \rho \cdot \cos(\phi/2)$ となり、

$\phi = 2COS^{-1}(\tan\Theta \cdot \tan\Phi \cdot \cos\theta')$ となる。

この ϕ が出せたら昼の時間は

T（昼）$= 12\phi/\pi$

T（夜）＝24-T（昼）

となる。また、日の出日の入りの時刻は

T（日の出）　＝12-T（昼）/2

T（日の入り）＝12+T（昼）/2

として出すことが出来る。

ϕ の吟味

１）赤道上では、$\Phi = 0$ であるから、$\phi = \pi$ となり

T（昼）＝12時間

T（夜）＝12時間

昼の長さ＝夜の長さとなっている。

２）秋分、春分点の時は、$\theta' = \pi/2$ であるから、$\phi = \pi$ となり

T（昼）＝12時間

T（夜）＝12時間

昼の長さ＝夜の長さとなっている。

３）地軸の傾きが0度の場合は、$\Theta = 0$ であるから、$\phi = \pi$ となり

T（昼）＝12時間

T（夜）＝12時間

昼の長さ＝夜の長さとなっている。

(ｲ)　θ と θ' の関係

θ　；太陽の黄道面での回転角

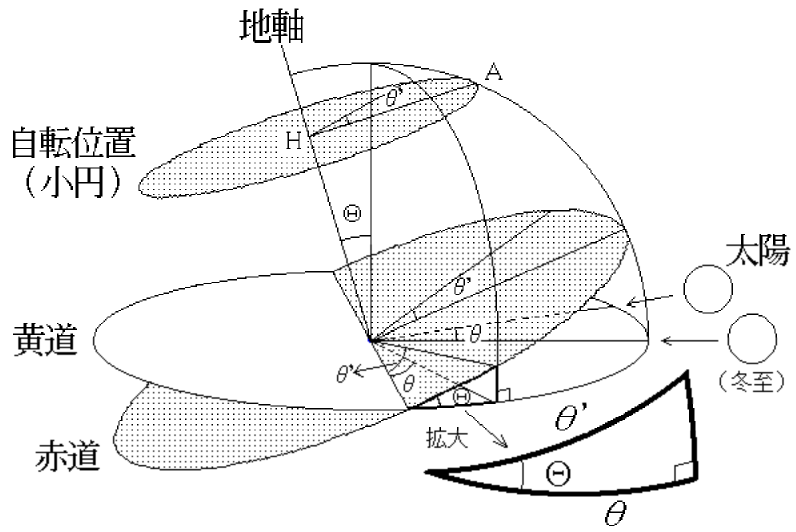
θ'；太陽を赤道面で見たときの回転角

地軸が傾いているので θ' は太陽の方向を向いていない。よって、

θとθ'は同じにならない。そこで、θとθ'の関係を見つけることにする。

黄道面で地球を輪切りにした図を考える。

図１１



球面三角形の法則[8)]を使うと次の様になる。

正弦余弦法則

$\sin c \cdot \cos A = \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C$

$\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A$

$\sin b \cdot \cos C = \cos c \cdot \sin a - \sin c \cdot \cos a \cdot \cos B$

図９の様に考え、
正弦余弦法則のはじめの式で$a = \theta$，$b = \theta'$，$C = \Theta$，$A = \pi/2$，
と取って式を整理すると次の様になる。

$\theta' = \tan^{-1}(\tan\theta / \cos\Theta)$
で与えられる。

ここで、この解は$0 \leqq \theta < \pi/2$であって、θが他の角度をとっても同じように導出することが出来る。それらの結果だけを書くことにする。

(a)　$0 \leqq \theta < \pi/2$の時　$\theta' = \tan^{-1}(\tan\theta / \cos\Theta)$

(b)　$\pi/2 \leqq \theta < \pi$の時　$\theta' = \pi - \tan^{-1}(\tan(\pi - \theta) / \cos\Theta)$

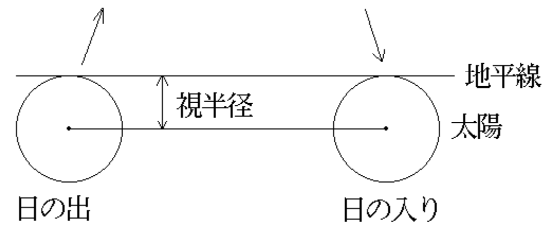
(c)　$\pi \leqq \theta < 3\pi/2$の時　$\theta' = \pi + \tan^{-1}(\tan(\pi - \theta) / \cos\Theta)$

(d)　$3\pi/2 \leqq \theta < 2\pi$の時　$\theta' = 2\pi - \tan^{-1}(\tan(2\pi - \theta) / \cos\Theta)$

(ｳ)　太陽の視半径による補正

太陽の日の出日の入りの定義は、図１２の様になっている。太陽の中心ではなく太陽の視半径のぶんだけずれる。

図１２



昼の長さの補正は、
$+2H_1/\cos\Phi$
日の出の時刻の補正を
$+H_1/\cos\Phi$
日の入りの時刻の補正を
$-H_1/\cos\Phi$
と取らねばならない。ただし、地平線からの太陽の入出の角度は、近似的に$\pi/2 - \Phi$であるとする。

H_1;太陽の視半径による補正項。理科年表[9)]によると、太陽の視半径は、15’59″.64である。

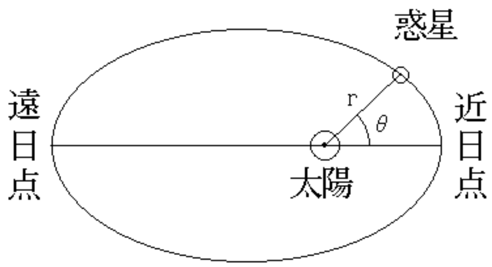
(ｴ)　大気の屈折による補正

地球には大気があり太陽が地平線近くになると屈折により浮き上がって見える。そのため昼の長さが長くなり、日の出日の入りの時刻を補正しなければならない。理科年表[10)]によると、地平大気差の補正項として、$H_2 = 35'8''$と取ってある。よって、補正項は、$H_2/\cos\Phi$となる。

(ｵ)　楕円軌道を取る時の回転角

惑星は一般に楕円軌道を取っているため回転角も一定ではなく、一日に回転する角度も異なる。よって、太陽光の当り方も円軌道とは違う様になってくる。そのため、昼夜の長さ、日の出日の入りの時刻、南中時刻にも影響を与えることになる。以下、この影響による補正項に付いて述べる。

図１３



r ；太陽惑星間の距離
θ ；回転角
e ；離心律
G ；万有引力定数
m ；惑星の質量
M ；太陽の質量
k ；角運動量

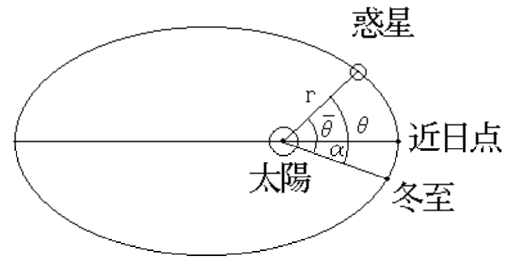
と取ることにする。

一般に楕円軌道の式は次の様に与えられる。[11)]
$r = l / (1 + e \cdot \cos\theta)$
ここで、
$l = k^2 / (G \cdot m^2 \cdot M)$　で与えられる定数である。
また、面積速度一定の法則より、
$r^2 \cdot d\theta / dt = k / m$

この式を、楕円の式に代入すると、
$l^2 / (1 + e \cdot \cos\theta)^2 \cdot d\theta / dt = k / m$
積分形に直すと次のようになる。
$\int d\theta / (1 + e \cdot \cos\theta)^2 = t \cdot k / (m \cdot l^2) + 定数$
となって θ と t との関係がだせる。
θ が与えられて t を求めるには、積分を実行すれば解けるが、t が与えられて θ を求める時には適当な θ を代入し t と比較し近くなったら計算をやめると言う方法を取る。この数値計算法としてニュートン・ラプソン法を採用する。
また、付け加えであるが、$e \ll 1$ の場合には次の様な近似も有効である。
$1 / (1 + e \cdot \cos\theta)^2 \fallingdotseq 1 - 2e \cdot \cos\theta$
これを積分の式に代入すると、
$\theta - 2e \cdot \sin\theta = t \cdot k / (m \cdot l^2) + 定数$

となり、計算が簡単になる。

図１１



しかし、私たちの回転角の始点は冬至の方角で近日点の方向とは一致しない。よって、次の様な座標変換が必要である。$\theta \to \theta - \alpha$
$t \to t - t_k$
α ；冬至から近日点までの角度
t_k ；惑星が近日点に来た時の日時

(ｶ)　南中時刻のずれについて

南中時刻が１２時からずれる理由は２つある。１つは、地軸が傾いているからであり、もう１つは、円軌道ではなく楕円軌道を取るからである。この２つの補正項について述べる事にする。

(a)　地軸が傾いている事による補正

地軸が傾いているので、傾いていない時に比べて太陽を見る角度が異なってくる。その分南中時刻もずれてくる事になる。すなわち、
$D_1 = \theta - \theta'$ だけずれる。

(b)　楕円軌道による補正

楕円軌道と円軌道の違いを考えてみる。

円軌道で一定角速度で回転しているとすれば、角速度 $\omega = k / (m \cdot l^2)$ で与えられる。そこで、円軌道からのずれ（補正項）を D_2 とすると、補正項は、次のように与えられる。
$D_2 = \theta - \alpha - \omega (t - t_k)$
この分だけ南中時刻が円軌道よりずれることになる。
南中時刻のずれをまとめると、次の様になる。
角度にして南中時刻は、$D_1 + D_2$ だけずれ、時間にすると、12（D_1

＋D_2）／π時間ずれることになる。

・　精度及び楕円軌道効果について（理科年表との比較）

・で述べた理論を基に日の出日の入りの時刻と南中時刻について数値計算をした。その結果と理科年表[12] の値を比べてみたのが次の表である。

ただし、次の様な値を用いて計算をし、２０日ごとの値を比較した。

地軸の傾きを23.44 度とし、場所は、旧東京天文台（東京都港区麻布台2-1）東経139° 44′ 40″ 9，北緯35° 39′ 16″ 0　とした。

（a）　地球の公転軌道を楕円として計算した場合の比較

表４

９９０年	理科年表			計算値（楕円軌道）		
月　　日	日の出	南中	日の入	日の出	南中	日の入
1月　1日	6:51	11:44	16:38	6:51	11:44	16:37
1月　21日	6:48	11:52	16:57	6:48	11:52	16:56
2月　10日	6:34	11:55	17:17	6:33	11:55	17:17
3月　2日	6:11	11:53	17:37	6:10	11:53	17:36
3月　22日	5:43	11:48	17:54	5:42	11:48	17:54
4月　11日	5:15	11:42	18:10	5:14	11:42	18:10
5月　1日	4:50	11:38	18:27	4:49	11:38	18:27
5月　21日	4:32	11:37	18:43	4:32	11:37	18:43
6月　10日	4:25	11:40	18:56	4:25	11:40	18:56
6月　30日	4:28	11:45	19:01	4:28	11:44	19:01
7月　10日	4:33	11:46	18:59	4:33	11:46	18:59
7月　30日	4:47	11:47	18:48	4:47	11:47	18:48
8月　19日	5:02	11:45	18:27	5:02	11:45	18:27
9月　8日	5:18	11:39	18:00	5:17	11:39	18:00
9月　28日	5:33	11:32	17:30	5:32	11:31	17:31
10月　18日	5:49	11:26	17:03	5:49	11:26	17:03
11月　7日	6:08	11:25	16:41	6:08	11:24	16:40
11月　27日	6:28	11:28	16:29	6:28	11:28	16:28
12月　17日	6:44	11:37	16:30	6:44	11:36	16:28
平均絶対誤差（分）				0.368	0.158	0.421

日の出日の入りの時刻、南中時刻とも理科年表と比べて誤差の平均は30秒以内である。

（b）　地球の公転軌道を円として計算した場合の比較

表５

１９９０年	理科年表			計算値（円軌道）		
月　　日	日の出	南中	日の入	日の出	南中	日の入
1月　1日	6:51	11:44	16:38	6:51	11:44	16:37
1月　21日	6:48	11:52	16:57	6:47	11:50	16:53
2月　10日	6:34	11:55	17:17	6:31	11:51	17:11
3月　2日	6:11	11:53	17:37	6:07	11:47	17:28
3月　22日	5:43	11:48	17:54	5:38	11:41	17:45
4月　11日	5:15	11:42	18:10	5:10	11:35	18:01
5月　1日	4:50	11:38	18:27	4:45	11:32	18:18
5月　21日	4:32	11:37	18:43	4:28	11:32	18:36
6月　10日	4:25	11:40	18:56	4:22	11:37	18:52
6月　30日	4:28	11:45	19:01	4:27	11:44	19:00
7月　10日	4:33	11:46	18:59	4:34	11:47	19:00
7月　30日	4:47	11:47	18:48	4:51	11:51	18:51
8月　19日	5:02	11:45	18:27	5:09	11:50	18:31
9月　8日	5:18	11:39	18:00	5:26	11:45	18:05
9月　28日	5:33	11:32	17:30	5:42	11:39	17:36
10月　18日	5:49	11:26	17:03	5:58	11:33	17:09
11月　7日	6:08	11:25	16:41	6:16	11:31	16:46
11月　27日	6:28	11:28	16:29	6:34	11:33	16:33
12月　17日	6:44	11:37	16:30	6:47	11:39	16:31
平均絶対誤差（分）				4.158	4.368	4.842

地球の公転軌道を楕円軌道ではなく円軌道であるとすると誤差の平均は４～５分もある。また、３～５月、９～１１月には９分近く誤差が出ることがある。この事を考えると、やはり、楕円軌道の効果は、無視できない事が分かる。